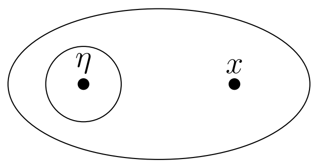
Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Einführung in die Topologie, WiSe 21/22
Blatt 1

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Sei $S = \{\eta, x\}$ eine zwei-elementige Menge versehen mit der Topologie $\tau = \{\emptyset, \{\eta\}, S\}$. Den topologischen Raum (S, τ), genannt Sierpiński-Raum, kann man nun wie folgt visualisieren:



Dabei haben wir um jede nicht-leere offene Menge einen Kreis/ein Oval gezeichnet, um die Offenheit darzustellen.
Sei nun $X = \{x, y, z\}$ eine drei-elementige Menge. Geben Sie unter Verwendung des obigen Visualisierungsverfahrens alle "wirklich unterschiedlichen" Topologien auf der drei-elementigen Menge X an, wobei "wirklich unterschiedlich" bedeutet, dass sich die Topologien nicht durch Vertauschung der Elemente ineinander überführen lassen.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Sei $X = \{x, y, z\}$ eine drei-elementige Menge wie in Aufgabe 1. Wir betrachten nun die von der Teilmenge $\mathcal{A} = \{\{x, y\}, \{y, z\}\} \subset \mathcal{P}(X)$ erzeugte Topologie $\tau = \tau(\mathcal{A})$ auf X.

(i) Ist $\mathcal{A}$ eine Basis der Topologie τ?

(ii) Finden Sie eine minimale Basis der Topologie τ.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei $X = \{x, y, z, w, v\}$ eine fünf-elementige Menge und sei $\tau = \tau(\mathcal{A})$ die von der Teilmenge $\mathcal{A} = \{\{x\}, \{z\}, \{w, v\}, \{x, y, z\}\} \subset \mathcal{P}(X)$ erzeugte Topologie auf X.

(i) Sind die Teilmengen $\{y\}, \{x, z, v\}, \{x, z, w, v\} \subset X$ offen? Falls nein, bestimmen Sie das Innere dieser Mengen.

(ii) Sind die Teilmengen $\{y\}, \{w, v\}, \{x, y, w\} \subset X$ abgeschlossen? Falls nein, bestimmen Sie den Abschluss dieser Mengen.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
In der Vorlesung haben wir den Begriff einer Topologie auf einer Menge X vermöge offener Mengen formuliert und dann abgeschlossene Mengen als Komplemente der offenen Mengen erhalten. Wie müsste die Definition einer Topologie auf einer Menge X aussehen, wenn man statt der offenen Mengen die abgeschlossenen Mengen als Ausgangspunkt nimmt?